**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**
**Helsingborg**

**LÖSNINGAR**
**ANALYS 1**
**2025-01-17**

**1.** a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-7}{(x-2)^2}=\dfrac{4+2-7}{(2-2)^2}=\left(\dfrac{-1}{0^+}\right)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{\pi}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{6x}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)3x}{3x\cdot(e^{6x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{3x\cdot 2}{(e^{6x}-1)\cdot 2}=1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x-\sqrt{7+4x^2}=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-\sqrt{7+4x^2})\cdot(2x+\sqrt{7+4x^2})}{2x+\sqrt{7+4x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x)^2-(\sqrt{7+4x^2})^2}{2x+\sqrt{7+4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-(7+4x^2)}{2x+\sqrt{7+4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7}{2x+\sqrt{7+4x^2}}=\left(\dfrac{-7}{\infty}\right)=0$

**2.** a) $\sum\limits_{k=1}^{10}7\cdot 2^{-k}=\sum\limits_{k=1}^{10}7\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{2^{-10}-1}{-\frac{1}{2}}=-7(2^{-10}-1)=7(1-2^{-10})$

b) $\left(2-x\right)^6=\sum\limits_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot(2)^k\cdot(-x)^{6-k}=$

$=\binom{6}{0}\cdot 2^0\cdot(-x)^6+\binom{6}{1}\cdot 2^1\cdot(-x)^5+\binom{6}{2}\cdot 2^2\cdot(-x)^4+\binom{6}{3}\cdot 2^3\cdot(-x)^3+\binom{6}{4}\cdot 2^4\cdot(-x)^2+$

$+\binom{6}{5}\cdot 2^5\cdot(-x)^1+\binom{6}{6}\cdot 2^6\cdot(-x)^0=$

$=x^6-6\cdot 2x^5+15\cdot 2^2x^4-20\cdot 2^3x^3+15\cdot 2^4\cdot x^2-6\cdot 2^5x+2^6=$

$=x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64\,.$

c) Ekvationen för **tangenten** är $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, där $x_0 = 2$

Vi bestämmer $y_0 = f(x_0)$ genom att sätta $x_0 = 2$ in i $y = 3e^{x^2-2x} + 4$.

I får $y_0 = 3e^{2^2-2\cdot 2} + 4 = 3 + 4 = 7$.

Vi deriverar $y' = (3e^{x^2-2x} + 4)' = 3(2x-2)e^{x^2-2x}$, beräknar $f'(x_0) =. f'(2) = 3(4-2)e^0 = 6$

Ekvationen för tangenten blir: $y - 7 = 6\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 6x - 5$

**3.** a) $z^3 = 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2}$. Sätt $z = re^{i\theta}$. Skriv om HL på polär form.

$$4\sqrt{2} - i4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\cdot(1-i) = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = 8e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

Ekvationen blir

$$\left(re^{i\theta}\right)^3 = 8\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 8\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = -\dfrac{\pi}{4} + n2\pi, \ n \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \qquad \text{dvs.} \quad \underline{z = 2\cdot e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{n2\pi}{3}\right)i}, n = 0,1,2.}$$

Svar: $\underline{z = 2e^{-\frac{\pi}{12}i},\ 2e^{\frac{7\pi}{12}i},\ 2e^{\frac{5\pi}{4}i}.}$

b) $p(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8 = 0$. Eftersom vi har ett polynom med reella

koefficienter så är även $\bar{z} = -2i$ en rot till ekvationen.

Vi dividerar $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$ med

$(z - 2i)\cdot(z - (-2i)) = z^2 - (2i)^2 = z^2 + 4.$

Vi får $p(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8 = (z^2 + 2z + 2)\cdot(z^2 + 4).$

Den första faktorn ger rötterna $-1 - i$ och $-1 + i$.

Svar: Rötterna är: $-1-i$, $-1+i$, $2i$ och $-2i$.

**4.** Eftersom funktionen $y = x - 2\arctan x$ är definierad för alla $x$, $D_f = R$, så kan det inte finnas lodräta asymptoter.
Vi går till

1) Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} x - 2\arctan x = \infty - 2\frac{\pi}{2} = \infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} x - 2\arctan x = -\infty - 2\frac{-\pi}{2} = -\infty$$

d.v.s. inga vågräta asymptoter då $x \to +\infty$ och $x \to -\infty$.

2) Sneda asymptoter:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} - \frac{2\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{2\arctan x}{x} = 1 - \frac{2\frac{\pi}{2}}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$m = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(x - 2\arctan x - x\right) = \lim_{x\to\infty}(-2\arctan x) = -2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Vi får att $y = x - \pi$ är en sned asymptot då $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x} - \frac{2\arctan x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{2\arctan x}{x} = 1 - \frac{2\frac{-\pi}{2}}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$m = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 2\arctan x - x\right) = \lim_{x\to-\infty}(-2\arctan x) = -2\frac{-\pi}{2} = \pi.$$

$y = x + \pi$ är en sned asymptot då $x \to -\infty$.

Kurvan har två sneda asymptoter.

3) Derivera $y' = (x - 2\arctan x)' = 1 - 2\dfrac{1}{1+x^2}$

4) Stationära punkter: $f'(x) = 0$

$$1 - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{1+x^2} \Leftrightarrow 1 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

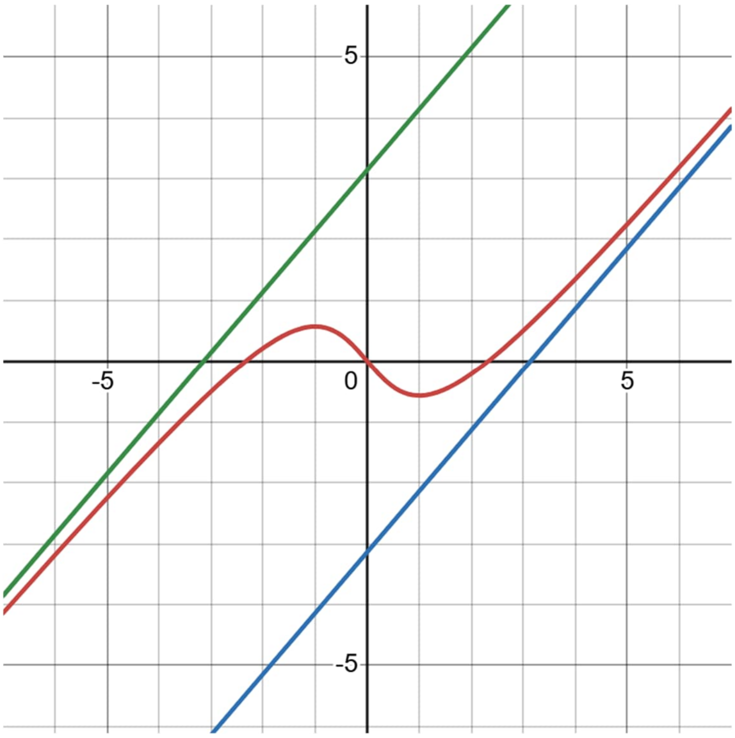
5) Teckenschemat blir:

| x | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | $-$ | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | Lok. max | $\searrow$ | Lok. min | $\nearrow$ |

Lokal maximipunkt i $x=-1,\ y=\frac{\pi}{2}-1$, lokal minimum i $x=1,\ y=1-\frac{\pi}{2}$.

6) Skärningen med $y$ -axeln : $x=0,\ y=0$

7) Graf:




**5.** a) Derivera $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$.

$$f'(x)=\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot(1+\sin^2 x)-\cos^2 x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}=\frac{-2\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+3\cdot\frac{2\cdot 1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3$$

b) Efter omskrivning får vi $f(x)=\frac{1}{x}-1+2\ln(x+1)>0 \quad , \quad x>0$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x+1}=\frac{2x^2-x-1}{x^2(x+1)}=\cdots=\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x^2(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=1\,;-\frac{1}{2}.$$

Då $x>0$ tar vi bara med $x=0$ och $1$ i teckenschemat.

Då $x^2(x+1)>0$ behöver vi inte ta med nämnaren i tabellen.

| x | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | odef | – | 0 | + |
| $f(x)$ | odef | $\searrow$ | 2ln2 | $\nearrow$ |

Vi ser direkt att $f(x)\geq 0$ för $x>0$, d v s gäller att $\frac{1}{x}-1>-2\ln(x+1)$ för $x>0.$

**6.** Låt lådans bottenyta ha längden $2x$ och bredden $x$ samt lådans höjd vara h.

Lådans area (utan lock) blir: $A=2x^2+2xh+4xh=2x^2+6xh.$

Volymen blir: $V=2x^2h.$

Vi löser nu ut h ur A: $h=\frac{A-2x^2}{6x}.$

Sätter vi in detta i V får vi:

$$V(x) = 2x^2 \cdot \frac{A - 2x^2}{6x} = x \cdot \frac{A - 2x^2}{3} = \frac{1}{3}\left(Ax - 2x^3\right).$$

$$V'(x) = \frac{A}{3} - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{A}{6}} \quad , \quad x = \sqrt{\frac{A}{6}} \text{ ty } \ x > 0.$$

h måste vara positiv dvs. $0 < x < \sqrt{\frac{A}{2}}$.

Du kan använda andraderivatan eller

Teckenschema

| $x$ | | $\sqrt{\frac{A}{6}}$ | |
|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $V(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{2A}{9}\sqrt{\frac{A}{6}}$ | $\searrow$ |

Alltså får vi maximal volym för $x = \sqrt{\frac{A}{6}}$.

Svar: Lådans maximala volym är $\frac{2A}{9}\sqrt{\frac{A}{6}}$.

**SLUT.**