LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2024-08-19 kl. 14.00–19.00

1. Svar: a) $10\sqrt{5}$ **b)** $\ln 6$ **c)** $\dfrac{\pi}{2}$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^5 x^{3/2}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^5 = 2\cdot 5^{3/2} - 0 = 10\sqrt{5}$

b) Via partialbråksuppdelning av integranden erhålles att

$$\int_{-1}^{4} \frac{3x-8}{(x+2)(x-5)}\,dx = \int_{-1}^{4}\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-5}\right)dx = \Big[2\ln|x+2| + \ln|x-5|\Big]_{-1}^{4}$$
$$= 2\ln 6 + \ln 1 - 2\ln 1 - \ln 6 = \ln 6.$$

c) Variabelsubstitutionen $t = \cos x$ ger att

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x, \quad (-1)\,dt = \sin x\,dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \quad x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{bmatrix}$$
$$= \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}\cdot(-1)\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \big[\arctan t\big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Svar: a) $y(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x}$ **b)** $y(x) = \sqrt{2e^{x^2} - 1}$

Lösningsförslag:
a) Division med x^2 ger att

$$x^2y' + xy = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}.$$

Via multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\ln x} = x$ erhålles sedan att

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \quad\Longleftrightarrow\quad xy' + y = \frac{1}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d}{dx}(xy) = \frac{1}{x}$$
$$\Longleftrightarrow\quad xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \quad\Longleftrightarrow\quad y = \frac{\ln x + C}{x},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ innebär att

$$1 = \frac{\ln 1 + C}{1} \quad\Longleftrightarrow\quad C = 1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$yy' = x\bigl(1+y^2\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = x \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{\ln\bigl(1+y^2\bigr)}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad\Longleftrightarrow\quad 1+y^2 = e^{x^2+2C}$$

$$\Longleftrightarrow\quad y = \pm\sqrt{e^{x^2+2C}-1},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ innebär att

$$\frac{\ln\bigl(1+1^2\bigr)}{2} = \frac{0^2}{2} + C \quad\Longleftrightarrow\quad C = \frac{\ln 2}{2}.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \sqrt{e^{x^2+\ln 2}-1} = \sqrt{2e^{x^2}-1}.$$

3. Svar: a) 9 **b)** 25

Lösningsförslag:

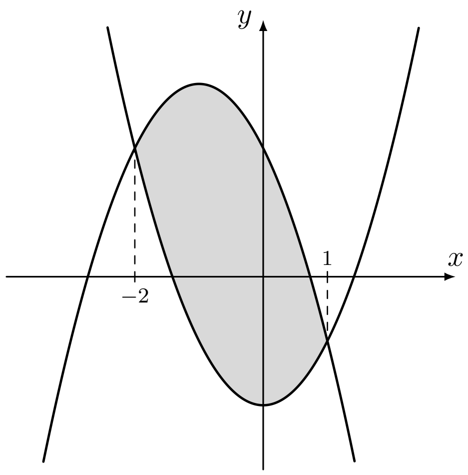
a) Skärningspunkterna mellan kurvorna $y = x^2 - 2$ och $y = -x^2 - 2x + 2$ bestäms av att

$$x^2 - 2 = -x^2 - 2x + 2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 + x - 2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 1.$$

Parabeln $y = x^2 - 2$ antar sitt minsta y-värde -2 då $x = 0$, medan parabeln

$$y = -x^2 - 2x + 2 = -(x+1)^2 + 3$$

antar sitt största y-värde 3 då $x = -1$. Det aktuella området framgår av figuren nedan.



Den sökta arean ges av integralen

$$\int_{-2}^{1}\Bigl(\bigl(-x^2-2x+2\bigr) - \bigl(x^2-2\bigr)\Bigr)\,dx = \int_{-2}^{1}\bigl(-2x^2-2x+4\bigr)\,dx$$

$$= \left[\frac{-2x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4\right) - \left(\frac{16}{3} - 4 - 8\right) = 9.$$

b) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned}\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^4 B_1(t),\\ e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_2(t),\\ \arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + t^5 B_3(t),\end{aligned}$$

och därmed är

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + (2x)^4 B_1(2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + x^4 B_4(x)$$

och

$$\arctan(4x) = 4x - \frac{(4x)^3}{3} + (4x)^5 B_3(4x) = 4x - \frac{64x^3}{3} + x^5 B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(1+2x) + 2xe^x - \arctan(4x)}{x^3}\\ &= \frac{\left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + x^4 B_4(x)\right) + 2x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 B_2(x)\right) - \left(4x - \frac{64x^3}{3} + x^5 B_5(x)\right)}{x^3}\\ &= \frac{25x^3 + x^4 B_6(x)}{x^3} = 25 + xB_6(x) \longrightarrow 25 + 0 = 25, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

4. Svar: $y(x) = -e^x(3\cos x + \sin x) + 2x^2 + 5x + 3$

Lösningsförslag:

Det karakteristiska polynomet $r^2 - 2r + 2$ har nollställena $1 \pm i$, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ansatsen $y_p = Ax^2 + Bx + C$, där $A, B, C \in \mathbb{R}$, ger vid insättning i differentialekvationen (med $y_p' = 2Ax + B$ och $y_p'' = 2A$) att

$$\begin{aligned}&2A - 2(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 4x^2 + 2x\\ \Longleftrightarrow\quad &2Ax^2 + (-4A + 2B)x + (2A - 2B + 2C) = 4x^2 + 2x\\ \Longleftrightarrow\quad &\begin{cases} 2A & = 4 \\ -4A + 2B & = 2 \\ 2A - 2B + 2C & = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 5 \\ C = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = 2x^2 + 5x + 3$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2x^2 + 5x + 3, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = e^x\big((C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 + C_2)\sin x\big) + 4x + 5.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 \qquad\quad + 3 = 0 \\ C_1 + C_2 + 5 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -e^x(3\cos x + \sin x) + 2x^2 + 5x + 3.$$

5. Svar: a) $\dfrac{\pi}{8}$ **b)** $\dfrac{\pi}{8}$

Lösningsförslag:

a) Med skivformeln erhålles den efterfrågade volymen av den generaliserade integralen

$$\pi \int_0^\infty \left(e^{-4x}\right)^2 dx = \pi \int_0^\infty e^{-8x}\, dx.$$

Eftersom

$$\pi \int_0^X e^{-8x}\, dx = \pi \left[-\frac{1}{8}e^{-8x}\right]_0^X = -\frac{\pi}{8}e^{-8X} + \frac{\pi}{8},$$

så följer det att volymen är

$$\pi \int_0^\infty e^{-8x}\, dx = \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{\pi}{8}e^{-8X} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}(0+1) = \frac{\pi}{8}.$$

b) Med rörformeln erhålles den efterfrågade volymen av den generaliserade integralen

$$2\pi \int_0^\infty xe^{-4x}\, dx.$$

Partialintegrering ger att

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^X xe^{-4x}\, dx &= 2\pi \left[-\frac{1}{4}xe^{-4x}\right]_0^X - 2\pi \int_0^X \left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) dx \\ &= -\frac{\pi}{2}Xe^{-4X} - 0 + \frac{\pi}{2}\int_0^X e^{-4x}\, dx = -\frac{\pi}{2}Xe^{-4X} + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^X \\ &= -\frac{\pi}{2}Xe^{-4X} - \frac{\pi}{8}e^{-4X} + \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

varav det följer att volymen är

$$2\pi \int_0^\infty xe^{-4x}\, dx = \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{\pi}{2}Xe^{-4X} - \frac{\pi}{8}e^{-4X} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 - 0 + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

6. Svar: Konvergent med värdet $\frac{1}{8}$

Lösningsförslag:
För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{e^{2x}} \leq \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}.$$

Vidare är den generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx$ konvergent, ty

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-2x}\,dx = \lim_{X\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^X = \lim_{X\to\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2X} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Det följer (enligt Sats 13.10 i kursboken) att även den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}\,dx$$

är konvergent. Konvergensen av denna integral visas emellertid också av nedanstående beräkning av dess värde.

Genom användning av den trigonometriska identiteten $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ erhålles att

$$\int \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-2x}\big(1-\cos(2x)\big)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx.$$

Upprepad partialintegrering ger att

$$\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\big(-2\sin(2x)\big)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - \int e^{-2x}\sin(2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)2\cos(2x)\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \int e^{-2x}\cos(2x)\,dx.$$

Sålunda är

$$2\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-2x}\big(-\cos(2x)+\sin(2x)\big) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$
$$\iff \int e^{-2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{4}e^{-2x}\big(-\cos(2x)+\sin(2x)\big) + B, \qquad B = \frac{C}{2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}\,dx &= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}\big(-\cos(2x)+\sin(2x)\big) + A \\ &= -\frac{1}{8}e^{-2x}\big(2-\cos(2x)+\sin(2x)\big) + A,\end{aligned}$$

där $A \in \mathbb{R}$. Detta ger att

$$\begin{aligned}&\int_0^X \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}\,dx = \left[-\frac{1}{8}e^{-2x}\big(2-\cos(2x)+\sin(2x)\big)\right]_0^X \\ &= -\frac{1}{8}e^{-2X}\big(2-\cos(2X)+\sin(2X)\big) + \frac{1}{8} \longrightarrow 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \quad \text{då } X \longrightarrow \infty,\end{aligned}$$

vilket visar att den givna generaliserade integralen är konvergent med värdet

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}\,dx = \frac{1}{8}.$$

(I gränsvärdesberäkningen ovan har vi använt att

$$\lim_{X\to\infty} e^{-2X}\cos(2X) = 0 \qquad \text{och} \qquad \lim_{X\to\infty} e^{-2X}\sin(2X) = 0,$$

vilket t.ex. följer av att

$$\left|\frac{\cos(2X)}{e^{2X}}\right| \le \frac{1}{e^{2X}} \qquad \text{och} \qquad \left|\frac{\sin(2X)}{e^{2X}}\right| \le \frac{1}{e^{2X}}.)$$