LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra, FMAA55
2024-05-31

PRELIMINÄR VERSION, VERSION 4

1. a) Ekvationerna för linjerna på parameterform är $\ell_1\colon (x,y,z) = (3t,t,4t)$ och $\ell_2\colon (x,y,z) = (2-4t, 5+3t, 7-t)$ respektive. Skärningen bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3t &= 2-4s \\ t &= 5+3s \\ 4t &= 7-\ s \end{cases} \iff \begin{cases} 3t & +4s &= 2 \\ t & -3s &= 5 \\ 4t & +\ s &= 7 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t & -3s &= 5 \\ 3t & +4s &= 2 \\ 4t & +\ s &= 7 \end{cases} \begin{matrix} -3 & -4 \end{matrix} \iff \begin{cases} t & -\ 3s &= 5 \\ & 13s &= -13 \\ & 13s &= -13 \end{cases} \begin{matrix} -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t & -\ 3s &= 5 \\ & 13s &= -13 \\ & 0 &= 0 \end{cases}$$

Vi har alltså $s = \frac{-13}{13} = -1$ och $t = 5+3s = 5+3\cdot(-1) = 2$. Insättning av $t=2$ i ℓ_1:s ekvation ger skärningspunkten $(6,2,8)$.

b) Beräkning ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (3,1,4)\times(-4,3,-1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-13,-13,13) = -13(1,1,-1) \end{aligned}$$

som har längd

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |-13||(1,1,-1)| = 13\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = 13\sqrt{3}.$$

Då

$$\frac{1}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \frac{1}{13\sqrt{3}}(-13)(1,1,-1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

finns det alltså precis två vektorer av längd 1 som är ortogonala mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, nämligen $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

c) Uppdelningen ges av $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_1$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{(3,1,4)\cdot(-4,3,-1)}{(-4)^2+3^2+(-1)^2}\right)\mathbf{v} \\
&= \left(\frac{3\cdot(-4)+1\cdot 3+4\cdot(-1)}{16+9+1}\right)\mathbf{v} \\
&= \left(\frac{-12+3-4}{26}\right)\mathbf{v} = -\tfrac{13}{26}\mathbf{v} = -\tfrac{1}{2}(-4,3,-1) \\
&= \tfrac{1}{2}(4,-3,1)
\end{aligned}$$

varav

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (3,1,4) - \tfrac{1}{2}(4,-3,1) = \tfrac{1}{2}(2,5,7).$$

2. a) Det gäller

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \iff$$

$$\lambda_1(0,1,2,-1) + \lambda_2(1,2,0,1) + \lambda_3(1,0,-4,3) = (0,0,0,0) \iff$$

$$\begin{cases}
 \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\
2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\
-\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0
\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \quad {}^{-2}\ {}^{1} \\
\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\
-\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0
\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\
\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad {}^{4}\ {}^{-3} \\
-4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\
3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0
\end{cases} \iff$$

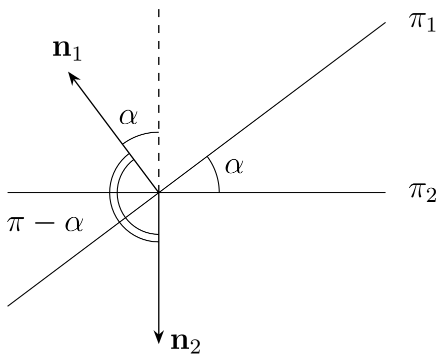
$$\begin{cases}
\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\
\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
0 = 0 \\
0 = 0
\end{cases}$$

Det finns oändtligt många lösningar $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ och därför är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ *linjärt beroende.*

b) Planet har normalvektorerna $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -4)$ och $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$. Då

$$\begin{aligned}
\cos([\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{(1,1,-4)\cdot(0,1,1)}{|(1,1,-4)||(0,1,1)|} \\
&= \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-4)\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}} \\
&= \frac{-3}{\sqrt{18}\sqrt{2}} = -\frac{3}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

gäller $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (dvs $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ är trubbig). Betrakta figuren



där vi ritar de två plan så att båda är vinkelräta mot papperets plan. Minsta vinkeln α mellan planen uppfyllar alltså $\pi - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ vilket ger $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

c) För att ta reda på om punkten tillhör planet lösas ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 = s + t \\ 1 = 2 + 2s - 3t \\ 3 = 3 - 4s + 5t \end{cases} \iff \begin{cases} s + t = 1 \\ 2s - 3t = -1 \\ -4s + 5t = 0 \end{cases} \begin{matrix} -2,\ 4 \end{matrix} \iff$$

$$\begin{cases} s + t = 1 \\ -5t = -3 \\ 9t = 4 \end{cases} \begin{matrix} \frac{9}{5} \end{matrix} \iff \begin{cases} s + t = 1 \\ -5t = -3 \\ 0 = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Ekvationssystemet saknar lösning så punkten ligger *inte* i planet.

Alternativ lösning: Planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -4)$ och

$\mathbf{v}_2 = (1, -3, 5)$. En normalvektor är därför

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1, 2, -4) \times (1, -3, 5) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -9, -5).\end{aligned}$$

Ekvationen är alltså $\pi\colon\ 2x+9y+5z+d = 0$ för något d. Då π innehåller punkten $(0, 2, 3)$ gäller $2 \cdot 0 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + d = 0$ vilket ger $d = -33$. Planet har alltså ekvationen $2x + 9y + 5z = 33$. Insättning av punkten $(1, 1, 3)$ i vänsterledet ger $2 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 26 \neq 33$, så punkten ligger *inte* i planet.

3. a) Låt F vara en $m \times n$-matris. För att $\underbrace{E}_{6\times 3}\underbrace{F}_{m\times n}$ ska vara definierad måste $m = 3$ och EF blir då en $6 \times n$-matris. För att $\underbrace{EF}_{6\times n}\underbrace{G}_{2\times 4}$ ska vara definierad måste $n = 2$. Matrisen F måste alltså vara en 3×2-matris och i detta fall blir EFG blir då en 6×4-matris.

b) Omskrivning ger

$$XA = B + X \iff XA - X = B \iff XA - XI = B \iff X(A - I) = B.$$

Vi visar nedan att matrisen $A - I$ är inverterbar och beräknar inversen. Detta ger

$$X(A - I) = B \iff X = B(A - I)^{-1}$$

Beräkning ger

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi har därför $\det(A - I) = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = -6 \neq 0$ så $A - I$ är inverterbar med inversen

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Beräkning ger nu

$$X = B(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 12 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Linjen ℓ_1 går genom punkten $P_1\colon (1,1,-1)$ och har riktningsvektorn

$$\mathbf{v}_1 = (4-1, -3-1, 0-(-1)) = (3,-4,1).$$

Linjen ℓ_2 går genom punkten $P_2\colon (3,-1,-3)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v}_2 = (0,2,-1)$. Observera att $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$, så linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är inte parallella. Låt π vara planet som innehåller ℓ_1 och är parallellt med ℓ_2. Detta plan har normalvektorn

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (3,-4,1) \times (0,2,-1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (2,3,6).
\end{aligned}$$

Ekvationen för π är därför $\pi\colon 2x+3y+6z+d=0$ för något d. Då π innehåller ℓ_1 som går genom P_1 gäller $2\cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + d = 0$, vilket ger $d = 1$. Planet har alltså ekvationen $\pi\colon 2x+3y+6z+1=0$.

Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 ges då av avståndet mellan π och P_2. Detta avstånd fås via avståndsformeln:

$$\frac{|2\cdot 3 + 3\cdot(-1) + 6\cdot(-3) + 1|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{14}{\sqrt{49}} = 2.$$

Alternativ bestämning av avståndet mellan π och P_2: Punkten $P_1\colon (1,1,-1)$ ligger på π vilket ger vektorn

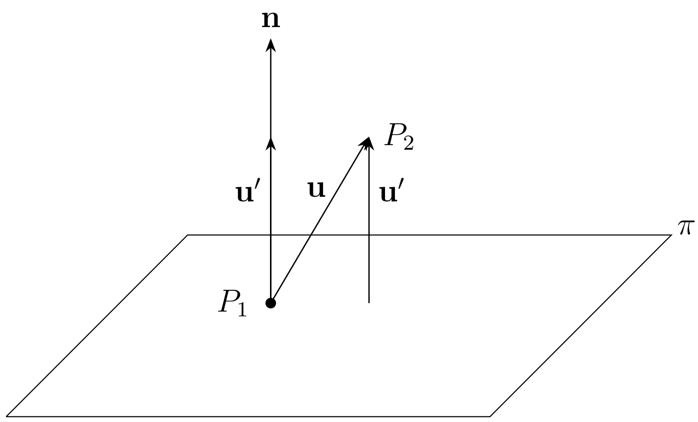
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (3-1, -1-1, -3-(-1)) = (2,-2,-2).$$

Projektionen av $\mathbf{u}$ på normalvektoren $\mathbf{n}$ blir då

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} \\
&= \left(\frac{(2,-2,-2)\cdot(2,3,6)}{|(2,3,6)|^2} \right) (2,3,6) \\
&= \left(\frac{4-6-12}{2^2+3^2+6^2} \right) (2,3,6) \\
&= \tfrac{-14}{49}(2,3,6) = -\tfrac{2}{7}(2,3,6).
\end{aligned}$$

Avståndet är då

$$|\mathbf{u}'| = \left| -\tfrac{2}{7}(2,3,6) \right| = \tfrac{2}{7}|(2,3,6)| = \tfrac{2}{7}\sqrt{2^2+3^2+6^2} = \tfrac{2}{7}\sqrt{49} = 2.$$



5. **a)** Determinanten av A är:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{vmatrix} = 4a + 4 + 8a - 4a^2 - 4 - 8 = -4a^2 + 12a - 8$$

$$= -4\left(a^2 - 3a + 2\right) = -4(a-1)(a-2).$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

$$A \text{ inverterbar } \iff a \notin \{1, 2\}.$$

Huvudsatsen ger också att för sådanna a-värden har ekvationssystemet $AX = Y$ en entydig lösning för alla Y.

b) Det gäller

$$Y = AX_1 = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3a \\ 0 \\ 4-4a \end{pmatrix}$$

och

$$Y = AX_2 = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5a \\ 0 \\ 4-4a \end{pmatrix}$$

Alltså gäller

$$AX_1 = AX_2 \iff 2 - 3a = 6 - 5a \iff 2a = 4 \iff a = 2.$$

Insättning ger

$$Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vi lösar nu ekvationssystemet $AX = Y$ i detta fallet.

$$\begin{cases} 2x & +2y & -2z & = & -4 \\ 2x & +4y & -2z & = & 0 \\ -x & -4y & +\ z & = & -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} -1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x & +2y & -2z & = & -4 \\ & 2y & & = & 4 \\ & -3y & & = & -6 \end{cases} \quad \tfrac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x & +2y & -2z & = & -4 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Återsubstitution ger $z = t$, $y = 2$ och

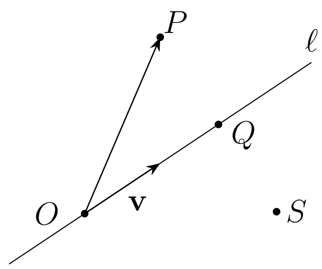
$$x = \tfrac{1}{2}(-4 - 2y + 2z) = -2 - y + z = -2 - 2 + t = -4 + t.$$

Lösningen blir alltså $(x, y, z) = (-4 + t, 2, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna spegling av rummets vektorer i linjen

$$\ell\colon (x, y, z) = (2 - 2t, -2 + 2t, 1 - t).$$

Vi beräknar först avbildningsmatrisen för F. Observera att origo $O\colon (0, 0, 0)$ ligger på linjen ℓ då det motsvarar parametervärdet $t = 1$. Från ekvationen erhålls också att ℓ har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (-2, 2, -1)$. Låt $P\colon (x_1, x_2, x_3)$ vara en godtycklig punkt. Låt dessutom Q beteckna projektionen av P och $S = F(P)$ vara spegelbilden av P.



Enligt figuren är $\overrightarrow{OQ}$ projektionen $\overrightarrow{OP}$ på $\mathbf{v}$, dvs.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{\overrightarrow{OP}\cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \\
&= \left(\frac{(x_1,x_2,x_3)\cdot(-2,2,-1)}{(-2)^2+2^2+(-1)^2}\right)\mathbf{v} \\
&= \left(\frac{-2x_1+2x_2-x_3}{9}\right)(-2,2,-1) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(4x_1-4x_2+2x_3,-4x_1+4x_2-2x_3,2x_1-2x_2+x_3\right).
\end{aligned}
$$

Figuran visar också att $\overrightarrow{PS}=2\overrightarrow{PQ}$ vilket ger

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS} \\
&= \overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PQ} \\
&= \overrightarrow{OP}+2\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right) \\
&= -\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ} \\
&= -(x_1,x_2,x_3)+\tfrac{2}{9}\left(4x_1-4x_2+2x_3,-4x_1+4x_2-2x_3,2x_1-2x_2+x_3\right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(-x_1-8x_2+4x_3,-8x_1-x_2-4x_3,4x_1-4x_2-7x_3\right),
\end{aligned}
$$

varav

$$F(x_1,x_2,x_3)=\tfrac{1}{9}\left(-x_1-8x_2+4x_3,-8x_1-x_2-4x_3,4x_1-4x_2-7x_3\right).$$

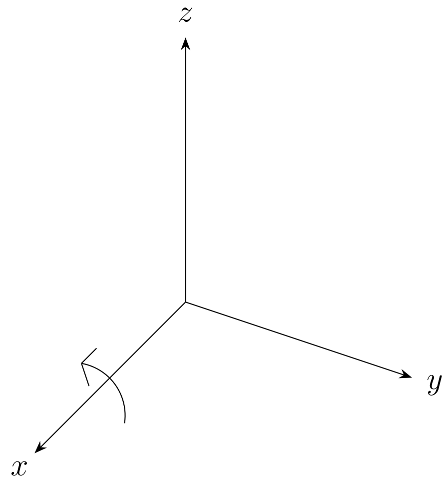
Då

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-x_1-8x_2+4x_3\\-8x_1-x_2-4x_3\\4x_1-4x_2-7x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&-8&4\\-8&-1&-4\\4&-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

är F linjär med avbildningsmatrisen

$$\mathsf{A}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&-8&4\\-8&-1&-4\\4&-4&-7\end{pmatrix}$$

Låt $G\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ beteckna vridning av rummets vektorer genom vinkeln $\frac{\pi}{3}$ i positiv led runt x-axeln (sett från spetsen av x-axeln). Vi beräknar nu avbildningsmatrisen för G.



Från figuren erhålls

$$\begin{aligned}
G(1,0,0) &= (1,0,0)\\
G(0,1,0) &= \left(0, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
G(0,0,1) &= \left(0, -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

vilket enligt Sats 8.1(ii) ger avbildningsmatrisen

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

för G. Spegling åtföljt av vridning är då den sammansatta avbildningen $G \circ F$. Enligt Sats 8.4 har denna avbildningsmatrisen

$$\begin{aligned}
\mathsf{BA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -4-2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{7\sqrt{3}}{2}-2 \\ 2-4\sqrt{3} & -2-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{7}{2}-2\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$