LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra, FMAA55
2024-08-27

1. a) Skärningen bestäms av ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+t & = & 1+2s \\ 2-t & = & 5+s \\ -3-2t & = & -1-2s \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcr} t & -2s & = & 0 \\ -t & -s & = & 3 \\ -2t & +2s & = & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} 1 \quad 2 \\ \\ \\ \end{array} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} t & -2s & = & 0 \\ & -3s & = & 3 \\ & -2s & = & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ -\frac{2}{3} \\ \\ \end{array} \iff \left\{\begin{array}{rrcr} t & -2s & = & 0 \\ & -3s & = & 3 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Vi har alltså $s = \frac{3}{-3} = -1$ och $t = 2s = 2 \cdot (-1) = -2$. Insättning av $t = -2$ i ℓ_1:s ekvation ger skärningspunkten $A\colon (-1, 4, 1)$.

b) Insättning av ℓ_1:s ekvation i π:s ekvation ger

$$\begin{aligned} x - 2y + z + 5 = 0 &\iff (1+t) - 2(2-t) + (-3-2t) + 5 = 0 \\ &\iff 1 + t - 4 + 2t - 3 - 2t + 5 = 0 \\ &\iff -1 + t = 0 \iff t = 1. \end{aligned}$$

Insättning av $t = 1$ i ℓ_1:s ekvation ger skärningspunkten $B\colon (2, 1, -5)$.

c) Avståndet mellan A och B är

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= |(2-(-1), 1-4, -5-1)| = |(3, -3, -6)| \\ &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

2. a) Påståendet är sant: Avbildningsmatrisen för vridning av rummets vektorer genom vinkeln θ i positiv led runt y-axeln (sett från spetsen av y-axeln) ges av

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Utveckling längs rad 2 ger

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1.$$

Anmärkning. Påståendet gäller även för en vridning i rummet kring en godtycklig linje genom origo.

b) Påståendet är falskt: Om π tex. är xy-planet ges avbildningsmatrisen för spegling i π av

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

som har determinant $\det \mathsf{A} = -1$.

Anmärkning. Man kan visa att $\det \mathsf{A} = -1$ för ett godtyckligt plan π genom origo.

c) Påståendet är falskt: Om $\mathsf{A} = \mathsf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gäller

$$\det(2\mathsf{A}) = \det\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

vilket är skild från

$$2\det(\mathsf{A}) = 2\det(\mathsf{I}_2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Anmärkning. Om A är en godtycklig $n \times n$-matrix gäller $\det(2\mathsf{A}) = 2^n \cdot \det(\mathsf{A})$.

d) Påståendet är falskt: Enligt Bassatsen (Sats 6.3) är 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ altid linjärt beroende.

e) Påståendet är sant. Om $\mathsf{AX} = \mathsf{0}$ har en entydig lösning gäller $\det \mathsf{A} \neq 0$ enligt Huvudsatsen (Sats 9.9). Enligt Sats 9.10 har ekvationssystemet $\mathsf{AX} = \mathsf{Y}$ därför entydig (och därmed högst en) lösning för alla Y.

3. Vektorerna $\mathbf{u} = (3, 1, 2)$ och $\overrightarrow{PQ} = (1-2, 1-2, 1-0) = (-1, -1, 1)$ är riktningsvektorer för det sökta planet π. En normalvektor till π ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \overrightarrow{PQ} \\ &= (3, 1, 2) \times (-1, -1, 1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1), -(3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)), 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) \\ &= (3, -5, -2). \end{aligned}$$

Planets ekvation är alltså $\pi\colon 3x-5y-2z+d=0$ för något d. Insättning av P ger $3\cdot 2-5\cdot 2-2\cdot 0+d=0$, dvs. $d=4$. Planets ekvation är alltså $\pi\colon 3x-5y-2z+4=0$.

Låt $\mathbf{v}=(1,-1,4)$ vara riktningsvektorn för ℓ. Vi har

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=(1,-1,4)\cdot(3,-5,-2)=3+5-8=0.$$

Linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$ är alltså ortogonal mot planets normalvektor $\mathbf{n}$, dvs. $\mathbf{v}$ är parallell med planet. Linjen ℓ är alltså parallell med π.

Alternativ lösning av sista delen: Insättning av ℓ:s ekvation i π:s ekvation ger

$$\begin{aligned}&3(-1+t)-5(1-t)-2(-2+4t)+4=0 \iff\\ &-3+3t-5+5t+4-8t+4=0 \iff 0=0.\end{aligned}$$

Alla t-värden ger alltså skärning, dvs. linjen ligger i planet. Linjen är alltså parallell med planet.

4. Beräkning ger

$$\begin{aligned}(X-I)A=X+I &\iff XA-A=X+I\\ &\iff XA-X=A+I\\ &\iff X(A-I)=A+I\end{aligned}$$

Vi bevisar nu att

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&-2&2\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-3&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

är inverterbar och beräknar inversen:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=y_1\\ x_1-3x_2+2x_3=y_2\\ x_1=y_3\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}x_1=y_3\\ x_1-3x_2+2x_3=y_2\\ x_1+x_2-x_3=y_1\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}x_1=y_3\\ -3x_2+2x_3=y_2-y_3\\ x_2-x_3=y_1-y_3\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & = & & & y_3 \\ & x_2 - x_3 & = & y_1 & & -y_3 \\ & -3x_2 + 2x_3 & = & & y_2 & -y_3 \end{cases} \quad 3 \quad \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & = & & & y_3 \\ & x_2 - x_3 & = & y_1 & & -y_3 \\ & -x_3 & = & 3y_1 & +y_2 & -4y_3 \end{cases} \quad -1 \quad \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & = & & & y_3 \\ & x_2 & = & -2y_1 & -y_2 & +3y_3 \\ & -x_3 & = & 3y_1 & +y_2 & -4y_3 \quad (\cdot -1) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & = & & & y_3 \\ & x_2 & = & -2y_1 & -y_2 & +3y_3 \\ & x_3 & = & -3y_1 & -y_2 & +4y_3 \end{cases}$$

Alltså är $A - I$ inverterbar med inversen

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Då $A - I$ är inverterbar gäller $X(A-I) = A+I \iff X = (A+I)(A-I)^{-1}$. Insättning ger nu lösningen

$$X = (A+I)(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

5. a) Volymen med tecken av parallellepipeden är

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 0 - 0 + 1 \cdot (-1) = -1,$$

(utveckling längs kolonn 1) så volymen är $|-1| = 1$.

b) Avbildningsmatrisen A för den linjära avbildningen F uppfyller

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

vilket är ekvivalent till matrisekvationen

$$\underbrace{A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&2&-2\end{pmatrix}}_{C} \tag{1}$$

Vi visar nu att matrisen B är inverterbar och beräknar inversen.

$$\begin{cases} x_1 & & = y_1 \\ & x_2 + x_3 & = y_2 \\ & x_2 - x_3 & = y_3 \end{cases} \quad {}^{-1} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & = y_1 \\ & x_2 + x_3 & = y_2 \\ & -2x_3 & = -y_2 + y_3 \end{cases} \quad \tfrac{1}{2} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & = y_1 \\ x_2 & = \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \\ -2x_3 & = -y_2 + y_3 \quad (\cdot - \tfrac{1}{2}) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & = y_1 \\ x_2 & = \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 & = \tfrac{1}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

Matrisen är alltså inverterbar med inversen

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ekvationen (1) ger nu

$$\begin{aligned} A = CB^{-1} &= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-3\\0&0&2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Determinanten av avbildningsmatrisen är $\det A = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ då A är en triangulär matris. Enligt Sats 9.11 är volymen med tecken av den nya parallellepipeden

$$V(F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), F(\mathbf{v}_3)) = (\det A) \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 4 \cdot (-1) = -4,$$

så dess volymen är $|-4| = 4$.

6. Då

$$\begin{cases} ax & + & 2y & = & -2a+4 \\ x & - & y & = & a+4 \\ -x & + & (a+2)y & = & -8a+1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} ax & + & 2y & -(-2a+4)\cdot 1 & = 0 \\ x & - & y & - \quad (a+4)\cdot 1 & = 0 \\ -x & + & (a+2)y & -(-8a+1)\cdot 1 & = 0 \end{cases}$$

ser vi att det ursprungliga ekvationssystemet har lösningen (x, y) precis när det kvadratiska homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax & + & 2y & -(-2a+4)\cdot z & = 0 \\ x & - & y & - \quad (a+4)\cdot z & = 0 \\ -x & + & (a+2)y & -(-8a+1)\cdot z & = 0 \end{cases}$$

har den icke-triviala lösningen $(x, y, 1)$. Då ett kvadratisk homogent system endast kan ha icke-triviala lösninger när determinanten av koefficientmatrisen är 0 beräknas denna determinant. Utveckling längs första raden ger

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 2 & 2a-4 \\ 1 & -1 & -a-4 \\ -1 & a+2 & 8a-1 \end{vmatrix} &= a \cdot \begin{vmatrix} -1 & -a-4 \\ a+2 & 8a-1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a-4 \\ -1 & 8a-1 \end{vmatrix} \\
&\qquad + (2a-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a+2 \end{vmatrix} \\
&= a \cdot (-8a + 1 + a^2 + 2a + 4a + 8) \\
&\qquad - 2 \cdot (8a - 1 - a - 4) + (2a-4) \cdot (a + 2 - 1) \\
&= a \cdot (a^2 - 2a + 9) - 2 \cdot (7a - 5) \\
&\qquad + (2a-4) \cdot (a+1) \\
&= a^3 - 2a^2 + 9a - 14a + 10 + 2a^2 + 2a - 4a - 4 \\
&= a^3 - 7a + 6
\end{aligned}$$

Om $a^3-7a+6 \neq 0$ saknar ursprungliga ekvationssystemet alltså lösning och det kan endast finnas lösning om $a^3 - 7a + 6 = 0$. Provning ger att $a = 1$ är en rot. Polynomsdivision ger

$$a^3 - 7a + 6 = 0 \iff (a-1)(a^2 + a - 6) = 0$$

och pq-formeln ger sedan

$$\begin{aligned} a^2 + a - 6 = 0 &\iff a = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{2} \\ &\iff a = 2 \text{ eller } a = -3. \end{aligned}$$

Vi löser nu systemet för dessa 3 värden på a. För $a = 1$ erhålls

$$\begin{cases} x & +2y & = & 2 \\ x & -\ y & = & 5 \\ -x & +3y & = & -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x & +2y & = & 2 \\ & -3y & = & 3 \\ & 5y & = & -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & +2y & = & 2 \\ & -3y & = & 3 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

vilket ger entydiga lösningen $(x, y) = (4, -1)$.

För $a = 2$ erhålls

$$\begin{cases} 2x & +2y & = & 0 \\ x & -\ y & = & 6 \\ -x & +4y & = & -15 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x & +2y & = & 0 \\ & -2y & = & 6 \\ & 5y & = & -15 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x & +2y & = & 0 \\ & -2y & = & 6 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

vilket ger entydiga lösningen $(x, y) = (3, -3)$.

För $a = -3$ erhålls

$$\begin{cases} -3x & +2y & = & 10 \\ x & -\ y & = & 1 \\ -\ x & -\ y & = & 25 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x & +2y & = & 10 \\ & -\frac{1}{3}y & = & \frac{13}{3} \\ & -\frac{5}{3}y & = & \frac{65}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x & +2y & = & 10 \\ & -\frac{1}{3}y & = & \frac{13}{3} \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

vilket ger entydiga lösningen $(x, y) = (-12, -13)$.

Samlad gäller att för $a = 1$, $a = 2$ och $a = -3$ finns entydig lösning. För övriga värden på a saknas lösning.