Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen: 2024–08–30 kl 8^{00}–13^{00}
FMSF30 & FMSF32
Matematisk statistik

- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare samt utdelad formelsamling (häftad med tentamen).
- Tentamen består av 6 uppgifter om 1.0 poäng vardera, med delpoäng om minst 0.1 poäng.
- Betygsgränser: Betyg 3 (godkänt): 3.0 poäng. Betyg 4: 4.0 poäng. Betyg 5: 5.0 poäng.
- Resultatet läggs in i Ladok senast *fredag 20 september 2024*.
- För övriga instruktioner, se tentamensomslagets insida.

---

1. I städskåpet på ett studentboende finns 10 LED-lampor varav 4 är trasiga, men du vet inte vilka. Typiskt. Du behöver 3 lampor och tar en i taget ur städskåpet. Vad är sannolikheten att

   (a) Alla 3 fungerar? (0.3)

   (b) De första 2 fungerar, men inte den tredje? (0.3)

   (c) Exakt 2 av de 3 lamporna fungerar? (0.4)

2. Betjäningstiden ξ för en kund i en butikskassa kan beskrivas med fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{(15-x)^2}{225}, & 0 \leq x \leq 15 \\ 1, & x > 15 \end{cases}$$

   (a) Beräkna frekvensfunktionen $f(x)$. (0.2)

   (b) Beräkna den förväntade betjäningstiden $E(\xi)$. (0.4)

   (c) Beräkna standardavvikelsen $D(\xi)$. (0.4)

3. Man vill försöka visa att C-vitaminhalten i apelsinjuice *sjunker* vid en viss uppvärmning och 8 förpackningar juice från olika fabrikat inhandlas för testning. För varje förpackning i görs en bestämning av halten före uppvärmning (x_i) och en bestämning av halten efter uppvärmning (y_i). Följande koncentrationer uppmättes (i ml/liter):

Förpackning nr	1	2	3	4	5	6	7	8
Före (x_i)	201	302	218	156	252	183	254	189
Efter (y_i)	208	292	227	134	222	172	240	173

   (a) Motivera vilken stokastisk modell som är lämpligast för att jämföra väntevärde före och efter upphettning i detta fall. (0.3)

   (b) Ange noll- och mothypotes för att testa om viss uppvärmning *minskar* C-vitaminhalten i genomsnitt och testa hypotesen på nivån $\alpha = 0.05$. (0.7)

Var god vänd!

4. En viss typ av seismograf som används vid vägbyggnad är känslig för kraftiga stötar, exempelvis att bli tappad. Antag att seismografen utsätts för i genomsnitt två kraftiga stötar per vecka och att *tiden mellan två kraftiga stötar* (veckor) kan antas vara oberoende $\xi \in Exp(\lambda)$. När seismografen fått 100 stötar måste instrumentet lämnas in för att kalibreras.

   (a) Ange intensiteten λ för ξ. *Ledning:* Vilken enhet har λ om $E(\xi) = 1/\lambda$? (0.2)

   (b) Låt η vara tiden tills seismografen måste kalibreras, $\eta = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$.
   Beräkna $E(\eta)$ och $D(\eta)$. (0.3)

   (c) Arbetsledaren lämnade in seismografen redan efter 35 arbetsveckor och den behövde ändå kalibreras. Vad är sannolikheten att seismografen tappas så sällan som hon antar, $P(\eta \leq 35)$? Man kan anta att η är approximativt normalfördelad enligt (b). (0.5)

5. En byggingenjör har gjort följande 5 mätningar för att bestämma tryckhållfastheten i en ny typ av betong, μ:

i	1	2	3	4	5	
x_i	24.7	31.1	28.1	25.6	25.7	(MPa)

   Mätningarna kan antas vara observationer av den normalfördelade slumpvariabeln ξ med okänt väntevärde μ och känd standardavvikelse, $\sigma = 2.8$ (MPa).

   (a) Bestäm ett 90 % konfidensintervall för värdet på μ. (0.4)

   (b) Byggingenjören tycker att intervallet är för brett. Hur många *fler* mätningar skulle behövas för att ett 90 % konfidensintervall skall vara hälften så brett? (0.6)

6. Två studenter har mätt in en tomt med två olika avståndsmätare som har olika precision. Båda avståndsmätarna är väntevärdesriktiga med standardavvikelserna σ_1 respektive σ_2. Studenterna ska lämna in en gemensam rapport och funderar på hur resultaten skall vägas samman. De överväger linjärkombinationen

$$\eta = c \cdot \xi_1 + (1 - c) \cdot \xi_2,$$

   där ξ_1 och ξ_2 är samma avstånd uppmätt med respektive instrument, och $c \in [0, 1]$ är en konstant.

   (a) Bestäm det c som ger η bäst precision (minimerar $V(\eta)$). (0.8)

   (b) Visa att medelvärdet av avståndsmätarna ger bäst precision om $\sigma_1 = \sigma_2$. (0.2)

Lycka till!