Lösningsförslag

---

1. **Kretskort**: Definiera händelserna T: tillverkad på Taiwan, K: tillverkad i Kalifornien samt D: defekt enhet. Vi har då ur uppgiften $P(D \mid T) = 0.001$ och $P(D \mid K) = 0.03$ samt att $T \cup K = \Omega$ eller att $K = T^c$.

   (a) Vi får att $P(K) = 0.2$ och således $P(T) = 1 - P(K) = 0.8$. Sannolikheten att ett slumpmässigt valt kretskort är defekt är $P(D)$, där satsen om total sannolikhet är användbar. Vi får därmed (0.3)

   $$\begin{aligned} P(D) &= P(D \mid T) \cdot P(T) + P(D \mid K) \cdot P(K) \\ &= 0.001 \cdot 0.8 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.28\% \end{aligned}$$

   (b) Vi vill veta sannolikheten att ett kretskort tillverkades i Kalifornien betingat på att det är defekt, dvs $P(K \mid D)$ och då är Bayes sats användbar. Vi återanvänder resultatet från (a) och får (0.3)

   $$P(K \mid D) = \frac{P(D \mid K) \cdot P(K)}{P(D)} = \frac{0.03 \cdot 0.2}{0.0028} = 88\%$$

2. (a) Hur många delmängder (subsets) har $A := \{1, 2, 3\}$, inklusive mängden (the set) A and den tomma mängden (the null/empty set)? Kom ihåg att mängden av alla delmängder kallas potensmängd (Power set).
   Lösning: For every element in A, it is either in the subset, or not. We have 2 options for each element. That gives a total of 2^3 ways to create a subset. Hence, there are 8 subsets in total. (0.2)

   (b) Härled formeln för kardinaliteten av potensmängden (the cardinality of the power set) för en mängd med n element.
   Lösning: Same idea as before. 2^n. We can use recursion to solve this. Call a_n the number of subsets of a set with cardinality n. If you add one more element to the set, we try to construct subsets, you can simply pick the a_n subsets and either add the new element to each of them or simply leave it as it was. That gives you double as many subsets as that of the set with cardinality n. So, $a_{n+1} = 2a_n$. This gives you the answer 2^n. (0.2)

   (c) I en grupp av 20 personer så spelar 15 fotboll och 12 cricket. Om alla 20 spelar minst en sport, hur många spelar båda sporterna?
   Lösning: Union= Sum − Intersection. That makes it $20 = 15 + 12 - x$, where x is the number of people who play both. $x = 7$. (0.2)

Var god vänd!

3. **Lampa exponential**: Vi definierar $\xi \in Exp(\frac{1}{30000})$ med frekvensfunktion $f(x)$ från formelsamlingen. Vi beräknar

   (a)
   $$F(x) = P(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x},$$
   för $\lambda = 1/30000$. Se en skiss över fördelningsfunktionen i ex. Vännman (2020). (0.4)

   (b) Vi söker $p = P(\xi \leq 24 \cdot 365) = 1 - e^{-\frac{24 \cdot 365}{30000}} = 0.2532.$ (0.2)

4. Bevisa att relationen $\mathcal{R}$, definerad som $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y(\text{mod}7)$, är en ekvivalens relation (equivalence relation). Kom ihåg att, $x \equiv y(\text{mod}7)$ innebär att $(x - y)$ är delbart med 7, Till exempel $x = 12$ och $y = 19$.
   Lösning: $x - x = 0$, which is divisible by 7. So, $xRx,\ \forall\ x$. So, it is reflexive.
   $7|x - y \implies 7|y - x\ \forall\ x$ and y. So it is symmetric.
   $x - z = (x - y) + (y - z)$. So, if $7|x - y$ and $7|y - z$, that implies $7|x - z$. That makes it transitive.

   (0.6)

5. **Lampor binomial**: Vi har sannolikheten $p = 0.2532$ att en glödlampa går sönder inom ett år och $1 - p$ att den inte gör det. Livslängderna är oberoende och vi låter η vara antal som sönder inom ett år av $n = 25$. Då är $\eta \in Bin(n, p)$.

   (a) Antal som förväntas fungera är $n - np = n(1 - p) = 18.67$ (väntevärde) (0.2)

   (b) Vi beräknar (0.4)
   $$\begin{aligned} P(\xi \geq 5) &= 1 - P(\xi \leq 4) \\ &= 1 - P(\xi = 4) - P(\xi = 3) - P(\xi = 2) - P(\xi = 1) - P(\xi = 0) \\ &= 1 - \binom{25}{4} p^4 \cdot (1 - p)^{21} - \cdots - \binom{25}{0} p^0 \cdot (1 - p)^{25} \\ &= 1 - 0.0007 - 0.0057 - 0.0233 - 0.0606 - 0.1130 = 0.7966. \end{aligned}$$

6. (a) Hitta rätt domän för funktionen (domain of the function) $\log(\sqrt{x} - 1)$.
   Lösning: We can only take logarithm of positive numbers. So, $\sqrt{x - 1} > 0$. So, $x > 1$. This is the domain. (0.3)

   (b) Är funktionen $f : R \to R^+$, definerad av $f(x) = x^2$, injektiv, surjektiv, både-och eller inget av det? (is it injective/one-one, surjective/onto, both, or neither?)
   Lösning: Not injective, because, for any number in the co-domain, you can find two numbers in the domain. For example $2^2 = (-2)^2 = 4$. The function is surjective, because the co-domain is just the positive numbers, so you can always find their square roots in the domain. (0.3)

Var god vänd!

7. **Intäkt liten lastbil**: Speditionsfirmans intäkt som funktion av lasten blir $\eta = 12500 + 600\xi$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot \frac{x}{16^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{x}{16}\right), & 0 \le x \le 16 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

(a) Vi beräknar väntevärdet $E(\xi)$ med definitionen ur formelsamlingen: (0.3)

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{16} 3x\,\frac{x}{16^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{x}{16}\right)dx = \int_0^{16} 4\,\frac{x^2}{16^2}dx - \int_0^{16} 3\,\frac{x^3}{16^3}dx \\ &= \left[\frac{4 \cdot x^3}{16^2 \cdot 3}\right]_0^{16} - \left[\frac{3 \cdot x^4}{16^3 \cdot 4}\right]_0^{16} = \frac{4}{3} \cdot \frac{16^3}{16^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{16^4}{16^3} \\ &= 16\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) = 16 \cdot \frac{7}{12} = \frac{27+1}{3} = 9 + \frac{1}{3} \text{ ton.} \end{aligned}$$

(b) Vi beräknar förväntad intäkt som (0.3)

$$E(\eta) = E(12500 + 600\xi) = 12500 + 600E(\xi) = 12500 + 600 \cdot 9 + \frac{600}{3} = 18100 \text{ kr.}$$

8. (a) Hitta en allmän formel utan a ("a-free") för rekursions relationen $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$, där $a_0 = 1$.
Lösning: $a_n = 3a_{n-1} = 3^2 a_{n-2} = \ldots\ 3^n a_0 = 3^n$. (0.3)

(b) Visa, med induktion, att $5^n - 1$ är delbart med 4 för alla positiva heltal, $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Lösning: For $n = 1$, $5^n - 1 = 4$, which is divisible by 4. Now assume it is true for $n = m$. Observe, $(5^{m+1} - 1) - (5^m - 1) = 5^m(5 - 1) = 4 \times (5^m - 1)$. So, the difference between $5^{m+1} - 1$ and $5^m - 1$ is divisible by 4. Plus, according to the assumption $5^m - 1$ is divisible by 4. Hence, $5^{m+1} - 1$ is divisible by 4. (0.3)

9. **Kickstarter** Vi definierar $\xi \in Po(\lambda T)$ som antal händelser (backers) vid tiden T (timmar), för intensiteten $\lambda = 1.6$ händelser per timme.

(a) Vi har parametriseringen (jämfört med formelsamlingen)$\mu = \lambda T$, vilket ger $E(\xi) = 1.6T$ och $D(\xi) = \sqrt{1.6T}$. (0.1)

(b) Ur formelsamlingen får vi $\lambda T > 15$ för att normalapproximation skall vara acceptabel. Det ger $T > \frac{15}{1.6} = 9.37$. (0.1)

Var god vänd!

(c) Vi söker T timmar motsvarande hela veckor i fördelningen $\xi \in Po(\lambda T)$ som uppfyller $P(\xi > 1000) = 0.98$. Om $T > 9.37$ eller $V > \frac{9.37}{24 \cdot 7} = 0.06$ kan vi använda normalapproximationen $\xi \in N(\lambda T, \sqrt{\lambda T})$. Vi får då (0.4)

$$P(\xi > 1000) = 0.98 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \Phi\left(\frac{1000 - \lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right) = 0.98. \tag{1}$$

Lösning 1: Eftersom ett antal hela veckor efterfrågas kan vi beräkna kvantilsannolikheten ovan för $T = 168V$, där $V = 1, 2, 3, \ldots$, och utvärdera när denna överstiger 98 %. Vi får:

$$\begin{aligned}
V = v: &\quad 1 - \Phi\left(\frac{1000 - 1.6 \cdot 168 \cdot v}{\sqrt{1.6 \cdot 168 \cdot v}}\right) \quad \Rightarrow \\
V = 1: &\quad 1 - \Phi(44.60) = 1 - 1 = 0 \\
V = 2: &\quad 1 - \Phi(19.94) = 1 - 1 = 0 \\
V = 3: &\quad 1 - \Phi(6.81) = 1 - 1 = 0 \\
V = 4: &\quad 1 - \Phi(-2.29) = \Phi(2.29) = 0.989 \\
V = 5: &\quad 1 - \Phi(-9.38) = \Phi(9.38) = 1
\end{aligned}$$

och alltså behöver vi $V \geq 4$ hela veckor för att få minst 1000 backers.
Lösning 2: Vi kan också lösa T exakt ur kvantilsannolikheten ovan, dvs lösa ekvationen

$$\frac{1000 - \lambda T}{\sqrt{\lambda T}} = \Phi^{-1}(0.98) = 2.055 \quad \text{(tabell)} \tag{2}$$

vilket ger lösningen $T = 667.07$, dvs $T \geq 168 \cdot 4$, eller $V = 4$ veckor.

10. (a) Visa, med hjälp av en sanningstabell (truth table), att $\neg(p \wedge q)$ är samma som $\neg p \vee \neg q$.
Lösning:

p	q	¬ p	¬ q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Note, $\neg(p \wedge q)$ is the same as $(\neg p \vee \neg q)$. (0.3)

(b) Är följande två meningar ekvivalenta?

- Om det inte regnar, går jag ut och leker.
- Om det regnar, går jag inte ut och leker.

Om inte, förklara varför.
Lösning: The first statement doesn't say anything about the action on a rainy day. Going to play is certainly an option. In case of the second statement, going to play is not an option on a rainy day. On the other hand, in the second case, on a sunny day, one might choose to stay at home. But in the first case a sunny day implies one has to go to play. So, the statements differ. (0.3)

Slut!